2/12/19

Έχουμε δει:

- Μονοβηματικές μέθοδοι χαμηλής τάξης

Άμεση Euler: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ $+ O(h^2)$ τ.σ. (τάξη ακρ. 1)

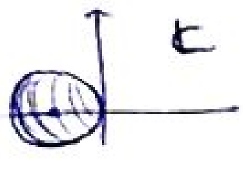
Πεπλεγμένη Euler: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ $+ O(h^2)$ τ.σ.

Μέθοδος τραπεζίου $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ τάξη ακρ. 2

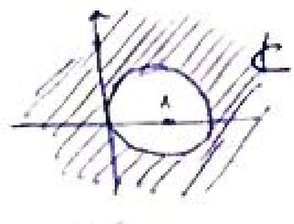
Μέθοδος Μέσου $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

- Περιοχές Απολ. Ευστάθειας ΣΟΣ

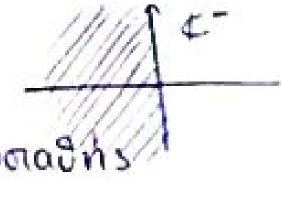
αμ Euler



πεπλ Euler:

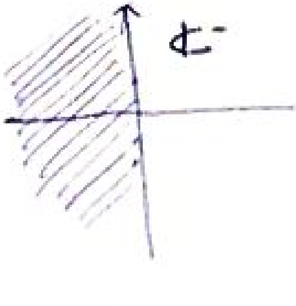


Μ. Τραπ.

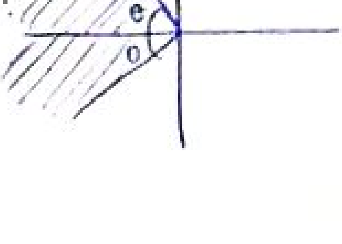


Α-ευσταθής

Μ. Μέσου



Α(θ)-ευσταθής:



(Νέα ύλη)

B- ευστάθεια

ΠΑΤ (*) : $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Θεωρούμε το διακριτό ανάλογο του (*) με τη βοήθεια μιας αριθμ. μεθόδου, όπου οι προσεγγίσεις με ομοιόμορφο διαμερισμό και $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, είναι $y^1, y^2, \dots, y^N$. Για την f ισχύει η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. Δηλ.

$$\forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}: \left(f(t,y_1) - f(t,y_2), y_1 - y_2\right) \leq 0$$

Τότε η ακολουθία $y^n - z^n$ είναι <u>φθίνουσα</u>, δηλ.

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|, \quad n = 0,1,2,\dots$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η μέθοδος του μέσου είναι <u>B-ευσταθής</u>

Πως θα δείξω ότι είναι φθίνουσα;

Έστω τα διακριτά ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Αυτά τα ΠΑΤ. διαφέρουν μόνο ως προς την αρχική συνθήκη.

Θέλουμε να δείξουμε: $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$

Επομένως θα πάρουμε τη διαφορά, δηλ. αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right)\right]$$

Θεωρώ αυτή την ποσότητα:

$$A = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1}) = \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)$$

Επειδή ισχύει:

$$(y^{n+1} - z^{n+1}, A) = (y^n - z^n, A) + h(\underbrace{f(\ldots) - f(\ldots), A}_{\leq 0 \text{ (από μονοπλ. Lip.)}})$$

Άρα

$$(y^{n+1} - z^{n+1}, A) \leq (y^n - z^n, A)$$

Άρα

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right) \leq$$
$$\leq \left(y^n - z^n, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right)$$

Δηλ. $\frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^{n+1} - z^{n+1}) + \cancel{\frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n)} \leq$

$$\leq \cancel{\frac{1}{2}(y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})} + \frac{1}{2}(y^n - z^n, y^n - z^n) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2 \Rightarrow$$

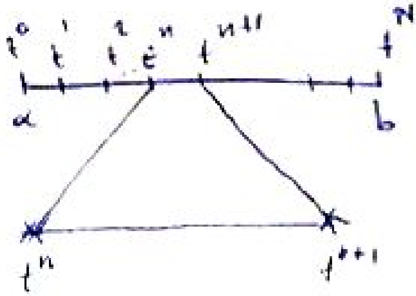
$$\Leftrightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$$

(Αν είχα μεθ. τραπ. πώς θα το έκανα;)

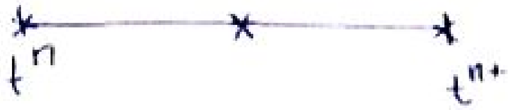
Άρα φθίνουσα ακολουθία, δηλ. η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής

Μεθοδοι Runge-Kutta (~1900)

Εχω ενα διάστημα $[a,b]$ και παίρνω εναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h=\frac{b-a}{N}$, $N\in\mathbb{N}$



Οι RK υπέθεσαν, παίρνοντας μια εσωτερική διαμ. στο αρχ. διάστημα:



δηλ. $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s)\,ds = h f(t^n)$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s,y(s))\,ds = h f(t^n,y^n)$$

ένας συναρτησιακός υπολογισμός.

Αν έκανα περισσότερους συν. υπολ. τότε:

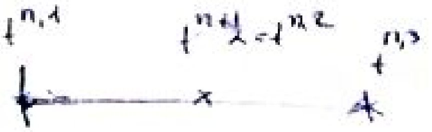
$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s)\,ds = \sum_{j=1}^{3} a_j f(\tau_j)$$

(τα a_j θα τα δίνω)

παίρνοντας 3 εσωτερικά σημεία έχω μεγαλύτερη ακρίβεια.

$\tau_1=0$ $(t^{n,j})$

$t^{n,1}=t^n+\tau_1 h=t^n+0.h=t^n$



Αν έχω:

Euler: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f\,ds = h f(t^n)$

πεπλ.: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f\,ds = h f(t^{n+1})$

τρ.: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f\,ds = h[\frac{1}{2}(f(t^n)+f(t^{n+1}))]$

$\tau_2=\frac{1}{2}$

$t^{n,2}=t^n+\tau_2 h=t^n+\frac{h}{2}=t^{n+\frac{1}{2}}$

$\tau_3=1$

$t^{n,3}=t^n+\tau_3 h=t^n+h=t^{n+1}$

Μονοβηματικές Μέθοδοι

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \quad , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 . \end{cases} \qquad y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ λύση της Δ.Ε.}$$

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad \int_0^{\tau_i} \psi(s)\, ds \simeq \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \psi(\tau_j) \quad , i=1,\ldots,q$$

όπου $0 < \tau_i \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

q: το έχω χωρίσει σε q σημεία.

Επίσης: $$\int_0^1 \psi(s)\, ds = \sum_{j=1}^{q} b_j\, \psi(\tau_j) \quad , j=1,2,\ldots,q$$

Οι σταθερές: a_{ij}, b_j, τ_j ορίζουν $q+1$, τύπους αριθμ. ολοκλήρ.

όπου: τ_i είναι οι εσωτερικοί κόμβοι

a_{ij} είναι τα βάρη στον τύπο της ολοκλήρωσης που υπολ. $[0,\tau_i]$

b_j είναι βάρη στον τύπο της ολοκλ. που υπολογίζεται στο $[0,1]$

Μορφή μητρώου:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι:

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{q,q}$ και $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_q)^T\in\mathbb{R}^q$

$b=(b_1,\dots,b_q)^T\in\mathbb{R}^q$

Παράδειγμα

Εστω το μητρώο: $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ ← και όμοια στη διακριτή, που είναι 0 : περιγράφει τη μέθοδο του Euler.

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + 0 \cdot y^n \\ y^{n+1} = y^n + h\displaystyle\int_0^1 b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\,dt \end{cases}$$ ← αυτά είναι τα εσωτερικά βήματα της RK.

$$= y^n + hf(t^n, y^{n,1}) \Rightarrow$$

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

Άρα έχω μια εξωτερική διαμέριση: $h=\frac{b-a}{N}$, $N\in\mathbb{N}$ και ο χρόνος είναι $t^n = a+nh$, $n=0,1,\dots,N$ και μια εσωτερική: $t^{n,i} = t^n + \tau_i h$.

πριν $y' = f(t,y)$, ολοκλ: $t^n \to t^{n+1}$, τώρα ολοκλ. μέχρι: τ_i

ολοκλ: $t^n \to t^{n,i}$: δηλ.

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}=t^n+\tau_i h} f(t, y(t))\,dt$$

αλλαγή μεταβλ

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) = y(t^n) + h\int_0^{\tau_i} f(t^n+hs, y(t^n+hs))\,ds$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot f(\underbrace{t^n+h\tau_j}_{t^{n,j}}, \underbrace{y(t^n+h\tau_j)}_{y(t^{n,j})})$$

Άρα

$$\boxed{y(t^{n,i}) = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))}$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\int_0^1 f(\underbrace{t^n + hs}_{t^{n,i}}, \underbrace{y(t^n + hs)}_{y(t^{n,i})})\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y(t^{n,i}))}$$

Άρα RK q-βημάτων: χρειάζεται μόνο μια Α.Σ.

$$q\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & \text{(Εσωτερική)} \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & \text{(Εξωτερική)} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$

για $n = 0$:

Αυξάνεται η ακρίβεια και οι συνολ. υπολ.

$y^0 = y_0$

$y^{0,i} = y^0 + h \dots$

$y^1 = y^0 + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{0,i}, y^{0,i})$